

Il morto sta bene in salute

Luciano Petrioli

Siena(Italy), Settembre 2003.

E' di un poeta e commediografo contemporaneo la commedia giallo comica noir: "Il morto sta bene in salute" dello scrittore napoletano Gaetano di Maio, nato a Napoli il 18 agosto 1927.

Mi sono ricordato di questa commedia, quando ho visto per la prima volta su internet, nel sito www.demo.istat.it, le "Tavole di mortalità della popolazione italiana per provincia e regioni di residenza - Anno 1998", che sono state poi pubblicate dall'ISTAT (Istituto nazionale di Statistica) nella serie: Informazioni n.19 -2002.

Nelle note metodologiche l'ISTAT dà particolare risalto ad alcune innovazioni apportate rispetto alle tavole di mortalità elaborate nel passato. Tra l'altro, tali innovazioni riguardano principalmente: a)l'unificazione della metodologia di calcolo fra le tavole nazionali e quelle regionali; b)la presentazione in un unico volume delle tavole nazionali, regionali e provinciali; c) l'uso di un nuovo modello per la stima delle probabilità di morte nelle età senili.

Con la presente nota intendiamo solo esaminare alcuni particolari e curiosi aspetti delle tavole ISTAT che ne caratterizzano la costruzione specialmente nelle età senili.

Come premessa, tuttavia, vogliamo riportare alcune osservazioni che in tempi diversi sono state fatte in Italia sulla opportunità o meno di assumere una data età quale limite estremo di vita.

Ad esempio, nelle "Tavole di mortalità della popolazione italiana" (ISTAT-Serie VI-vol.VIII, anno 1931), Gini e Galvani osservano che, in generale, i quozienti di mortalità per le età senili non possono essere determinati in modo corretto, data l'incertezza che offrono i dati relativi sia al numero dei decessi che a quello dei viventi in quelle età.

**I due autori si chiedono così se sia il caso di tralasciare senz'altro il calcolo di tali quozienti, fissando, ad esempio, una età limite di vita, indicata con ω , per cui ${}_{\omega-x}q_x = 1$, o determinare i quozienti senili con estrapolazioni che :"
... si conformino a certe ipotesi più o meno plausibili", e che risentano più o meno della arbitrarietà delle ipotesi che si pongono a loro fondamento.**

**Nello stesso lavoro del 1931, Gini e Galvani osservano, inoltre, che in tavole di alcuni paesi europei erano stati fissati valori limite per la durata della vita umana, desunti da ricerche eseguite nelle classi d'età estreme. Essi riconoscono anche che qualunque sia il metodo seguito per il loro calcolo, questi quozienti hanno una importanza piuttosto limitata . Tuttavia, proprio per le carenze offerte dalle rilevazioni dei dati, ritengono che :"
...sembra davvero eccessiva quella forzata soppressione di superstiti a una età stabilita a priori.", e che:"...non è affatto necessario che la probabilità di morte raggiunga il valore 1, perché gli l_x assumano, da una certa età in poi, valori praticamente nulli".**

Le loro tavole: 1881-1882, 1899-1902, 1910-1912, 1921-1922, vanno fino ad una età compresa fra 100-108 anni, e terminano appena il numero di sopravvivenenti scende ad un valore che è inferiore ad 1. Per le età senili procedono con l'interpolazione mediante iperbole determinata dai logaritmi delle probabilità di morte a 70, 80,90 anni con un asintoto rappresentante la probabilità 1.

Nelle "Tavole di mortalità della popolazione italiana 1950-53 e 1954-57" (ISTAT 1959), sempre a proposito della probabilità di morte per le età senili l'ISTAT osserva che: "Molti statistici fissano un limite preciso alla durata della vita umana, generalmente desunto dall'osservazione. Perché una generazione si estingua con pratica certezza, non è necessario però che la probabilità di morte raggiunga il valore preciso dell'unità in corrispondenza di una certa età; le tavole di mortalità non possono pretendere, cioè, di dire a quale età sia necessario che l'ultimo sopravvivenente muoia, ma soltanto in che modo si avvicina alla certezza pratica la probabilità che l'ultimo dei sopravvivenenti non raggiunga una certa età.". In sostanza si ripetono gli stessi concetti delle tavole di Gini e Galvani.

Anche nelle tavole ISTAT 1960-62 si assume che la probabilità di morte cresca tendendo asintoticamente all'unità, e si ripete nella nota 2) a pag.19 la stessa frase indicata sopra, ossia: "Molti statistici fissano un limite preciso..... raggiunga una certa età". Nelle tavole ISTAT 1960-62 si arriva in genere fino all'età di 109 anni, dove la tavola termina, quando il numero dei sopravvivenenti è compreso tra 0 ed 1.

In quelle del 1977-1979, le tavole terminano tutte a 104 anni d'età con un numero intero di sopravvivenenti.

Per le tavole ISTAT 1979-83: venne effettuata una interpolazione per 4 punti della funzione di sopravvivenza Gompertz-Makeham nelle età 65, 75, 85, 95. Qui le tavole terminano a 105 anni d'età con un numero intero maggiore di zero.

Sempre con la Gompertz-Makeham vennero elaborate le tavole ISTAT 1992, dove le funzioni biometriche furono presentate fino all'età di 109 anni.

Nelle tavole di mortalità del 1998 che stiamo esaminando, l'ISTAT imposta i suoi calcoli secondo il seguente schema: "Poiché dopo i 95 anni d'età gli eventi di morte si fanno rari, se non addirittura unici, man mano che ci si avvicina a soglie di sopravvivenza estreme, è necessario poter usufruire di un modello demografico che sia atto a descrivere un andamento regolare delle probabilità di morte. L'utilizzo di un modello è in questo caso finalizzato alla chiusura delle tavole di mortalità all'età di 125 anni. "

Ma la vera novità, secondo l'ISTAT, sta nel modello scelto per rappresentare l'evoluzione delle probabilità di morte che è quello di Kannisto (1998), presentato nella forma:

$$q_x = \alpha e^{\beta x} / (1 + \alpha e^{\beta x}) \quad [1]$$

e definito quale: "... funzione appartenente alla famiglia delle curve logistiche...".

Nella [1], anche se non viene esplicitamente detto, il valore della probabilità di morte in età x viene assimilato al valore del tasso istantaneo di mortalità in età x , al quale Kannisto fa riferimento nel suo lavoro ponendo, in varie occasioni:

$$\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} \quad \text{ed anche, più semplicemente:} \quad \mu_x = \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} \quad [2]$$

dove, μ_x indica la forza di mortalità o il tasso istantaneo di mortalità.

Noi osserviamo, a questo punto, che il modello di Kannisto altro non è che la funzione logistica tradizionale nella forma:

$$q_x = 1 / \left(1 + \frac{1}{a} e^{-bx} \right) \quad [3]$$

Per verificare ciò, se ce ne fosse bisogno, basta semplicemente dividere nella [1] numeratore e denominatore per ae^{bx} .

Poiché nella [3] l'asintoto superiore viene fissato con il valore uno, per l'adattamento della funzione ai dati osservati, rimane da stimare il valore dei due parametri a e b .

Per la stima di a e di b l'ISTAT linearizza la [3] per cui, mantenendo le notazioni usate, ottiene:

$$\ln(q_x / p_x) = \ln(a) + bx \quad [4]$$

La [4], ma non necessariamente, può essere scritta anche:

$$\log it q_x = \ln(a) + bx \quad [5]$$

secondo il termine coniato da Berkson (1944).

Dalle probabilità di morte standard, calcolate su base nazionale per maschi e femmine, si passa alle probabilità regionali mediante la relazione:

$$q_x^r = q_x^s \cdot K_x \quad \text{dove} \quad K_x = (q_{92}^r / q_{92}^s)^{(125-x)/33} \quad [6]$$

è una funzione esponenziale del rapporto fra la probabilità regionale a 92 anni e quella standard alla stessa età, che viene sviluppato nelle età successive in base alla frazione di tempo dell'intervallo di 33 anni (tra 92 e 125).

All'età di 92 anni il valore di K è q_{92}^r / q_{92}^s per cui non ci sono variazioni nella probabilità regionale; a 125 anni K è uguale ad 1 e, quindi, le due probabilità di morte hanno lo stesso valore, ma non per questo sono eguali ad 1.

Sempre dalle tavole ISTAT (Italia, 2002), si osserva che le probabilità di morte per i due sessi raggiungono i valori di 877.7 per 1000 nei maschi e di 824.2 nelle femmine al 119 anno d'età. (Figura 1).

Per età superiori a 125 anni, le probabilità di morte sia nazionali che regionali continuano la loro ascesa avvicinandosi asintoticamente sempre più ad 1 con valori di 0.999 per 1000 tra i 150 ed i 160 anni d'età, al quale non si può attribuire alcun significato oltre quello numerico.

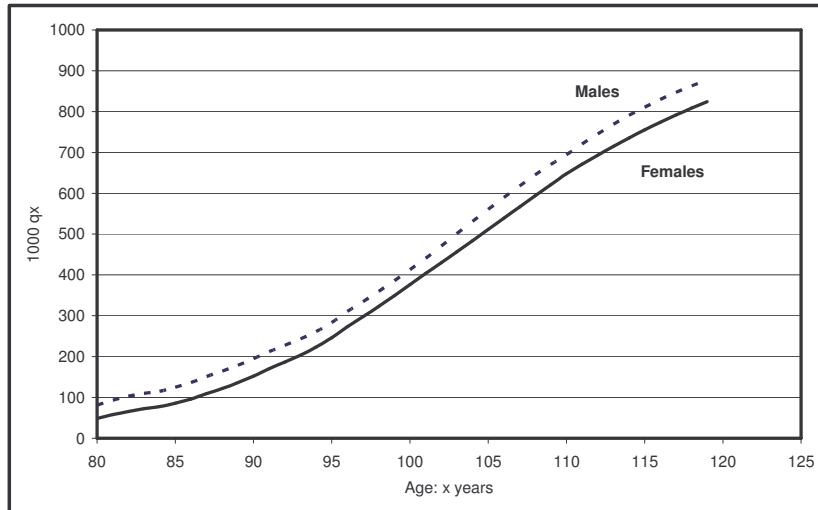


Figura 1. Probabilità di morte tra le età x e $x+1$. Tavole di sopravvivenza ISTAT 1998, Italia, maschi e femmine.

A parte la discutibilità del procedimento che per le tavole regionali considera un solo valore (q_{92}^r) per il collegamento con lo standard nazionale alla medesima età, un aspetto abbastanza curioso ci ha indotto ad occuparci di queste tavole. Generalmente, in esse si arriva a certe età molto avanzate in cui vi sono zero sopravvissuti che seguitano a manifestare probabilità di morte, di sopravvivenza e vita media anche nelle età successive. Ad esempio per la tavola nazionale femminile all'inizio di 112 anni si hanno zero sopravvissuti e zero decessi, ma la probabilità di sopravvivere fino a 113 anni è 0.3066, e la speranza di vita è di quasi un anno (essendo $e_{112}=0.92$). Questo si ripete anche nelle età successive (Tab. 1).

Tab. 1 Tavole di sopravvivenza ISTAT 1998. Italia, femmine con $l_0=100000$, e nascite per anno nel mondo nel periodo 1995-2000 pari a $l_0 = 131.993.000$.

Age x	l_x	d_x	1000 q_x	e_x	l_x	d_x
0	100000	531	5.3	81.76	131993000	604961
105	96	49	511.3	1.37	126523	64690
106	47	25	538.8	1.29	61833	33319
107	22	12	566.4	1.21	28514	16151
108	9	6	593.9	1.14	12363	7342
109	4	2	621.1	1.08	5021	3118
110	1	1	647.9	1.02	1903	1233
111	1	0	671.1	0.97	670	450
112	0	0	693.4	0.92	220	152
113	0	0	714.8	0.88	68	49
114	0	0	735.4	0.85	19	14
115	0	0	755.1	0.82	5	4
116	0	0	773.8	0.78	1	1
117	0	0	791.6	0.76	0	0
118	0	0	808.4	0.73	0	0
119	0	0	824.2	0.71	0	0

Si dirà che occorre considerare i decimali “nascosti”. Ma noi abbiamo provato ad applicare queste probabilità al numero di nati sulla Terra per anno nel periodo 1995-2000 (dati Onu - 2001), che risultano 131,993,000. Dalla seconda parte della Tab.1 si osserva però che anche partendo da un

numero notevole di ingressi nel processo di mortalità si giunge sempre alla assenza di sopravvivenenti che indica la fine di questo processo.

In sostanza, ci sembra che estendere i dati della tavola di mortalità in età in cui il numero dei sopravvivenenti è zero sia da evitare nella presentazione delle tavole stesse anche perché, tra l'altro, non ha alcuna utilità.

Gaetano di Maio nella sua commedia diceva che: "Il morto sta bene in salute". L'Istat, invece, ci informa che se di una collettività di individui, sottoposta ad un processo di eliminazione naturale, ne rimane zero ad una delle età senili, i cadaveri possono ancora sperare di vivere un po' di tempo, ossia che "stanno quasi bene in salute".

(1) Per maggiori ragguagli su questo modello l'ISTAT suggerisce, a pagina 16 del volume (2002), di riferirsi all'appendice metodologica che, però, ci sembra che non esista.

Bibliografia

- * Berkson j.,(1944) "Application of the logistic function to bio-assay", in *Journal of the American Statistical Association*
- * Galvani L.,(1937),"Tavole di mortalità della popolazione italiana 1930-32", *Annali di statistica, serie VII, vol.1.*
- * Istat, (1959), "Tavole di mortalità della popolazione italiana 1950-63 e 1954-57", *Annali di statistica, anno 88, serie VIII- vol.10.*
- * Istat,(1966), "Tavole di mortalità per regioni e causa di morte della popolazione italiana, 1960-62", *Annali di statistica, anno 95, serie VIII-vol.19.*
- * Istat,(1975),"Tavole di mortalità della popolazione italiana, 1970-72", *Supplemento al Bollettino mensile di Statistica, n.7.*
- * Istat(1983), "Tavole di mortalità della popolazione italiana per regione, 1977-79", *Supplemento al Bollettino mensile di Statistica, n.16.*
- * Istat,(1987), "Tavole di mortalità della popolazione italiana per regione, 1979-83", *Note e relazioni anno 1987, n.1.*
- * Istat,(1996), "Tavole di mortalità e tavole attuariali della popolazione italiana al 1992", *Note e relazioni anno 1996, n.1*
- * Istat(2002), *Tavole di mortalità della popolazione italiana per provincia e regioni di residenza – Anno 1998*, Serie informazioni n.19, Roma.
- * ONU(2001), "World Population Prospects. The 2000 Revision", United Nations, New York.
- * Thatcher, A.R.; Kannisto, Väinö; Vaupel, James W. (1998), "The force of mortality at ages 80 to 120", Odense, Odense University Press.

* * *